# ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO

# *Elementi di calcolo combinatorio*

- Si tratta di una serie di tecniche per determinare il numero di elementi di un insieme senza enumerarli direttamente.
- Dati *n* elementi distinti ci chiediamo quanti insiemi di k elementi riusciremo a formare. Questi sono detti *campioni di ampiezza k*.
- Il numero di campioni che possiamo ottenere dipende da come formiamo i campioni:

  1. Ordine:
     - Ordinati (*disposizioni*)
     - Non ordinati (*combinazioni*)
  2. Ripetizione
     - Con ripetizione
     - Senza ripetizione

# *esempio 1*

Cinque persone hanno a disposizione tre sedie; vogliamo sapere in quanti modi le possono occupare.

• L'**ordine** viene considerato in quanto è diverso sedersi sulla prima sedia piuttosto che sulla seconda.

• **Non** c'è **ripetizione** perché un soggetto non può sedersi nello stesso tempo su due sedie diverse.

# *esempio 1(2)*

Si tratta pertanto di una ***disposizione senza ripetizione*** di 5 elementi presi a 3 alla volta.

$$D_{5,3} =$$ disposizione semplice di 5 elementi di classe 3

Il primo soggetto da far sedere può essere scelto in 5 modi diversi. Il secondo può essere scelto in 4 modi, il terzo in 3.

Pertanto il numero totale di possibili disposizioni è dato da:

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

In generale, dati *n* elementi, volendo fare un sottoinsieme di *k*, il primo di questi potrà essere scelto in *n* modi diversi, il secondo in *(n-1)*, e così via fino al *k*-mo che potrà essere scelto in *(n-k+1)* modi.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Le stesse disposizioni si possono calcolare con

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

*n!* si chiama *fattoriale*

N.B. si ricordi che, per convenzione 0! = 1

(Approfondimento) Questo è vero perché:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

# *esempio 2*

Con sette giocatori di calcio, supponendo di farne giocare 3 in attacco, quante linee offensive si possono formare?

• L'ordine conta perché è diverso giocare al centro piuttosto che a destra o a sinistra;

• Non c'è ripetizione perché un giocatore non può occupare più di una posizione;

• Si tratta allora di disposizioni semplici di 7 elementi di classe 3

$$D_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

# *esempio 3*

Dati quattro numeri (1, 3, 6, 8), vogliamo sapere quanti numeri formati da quattro cifre diverse possiamo ottenere.

• L'ordine viene considerato in quanto posizioni diverse ci danno numeri diversi ($1368 \neq 6381$).

• Non c'è ripetizione perchè abbiamo stabilito che i numeri debbano essere formati da cifre diverse.

• Si tratta pertanto di una ***disposizione senza ripetizione*** di 4 elementi presi a 4 alla volta che prende il nome di ***permutazione***.

$$D_{4,4} = P_4$$

permutazione semplice di 4 elementi

# *esempio 3*$_{(2)}$

Il numero totale di possibili permutazioni è dato da:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

In generale, dati *n* elementi, le permutazioni semplici che possiamo ottenere sono

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

# *esempio 4*

Quanti anagrammi possiamo fare (anche senza senso) della parola MARTE?

• L'ordine conta perché cambiando la posizione cambia l'anagramma (ERTAM≠TRAME);

• Non c'è ripetizione perchè ogni lettera viene usata una sola volta in ciascun anagramma;

• Si tratta allora di permutazioni semplici di 5 elementi.

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

# *esempio 5*

Quattro studenti (A, B, C, D) hanno a disposizione due posti liberi; vogliamo sapere in quanti modi li possono occupare.

Se consideriamo l'ordine, e, dato che ciascun soggetto può occupare solo un posto, avremo le seguenti possibilità:

| | | |
|---|---|---|
| AB | AC | AD |
| BA | BC | BD |
| CA | CB | CD |
| DA | DB | DC |

$$D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$$

# *esempio 5$_{(2)}$*

Poniamoci ora dal punto di vista del soggetto e supponiamo che non gli importi quale posto occupare ma solo se si siede o no.

Se non consideriamo l’ordine, il numero di situazioni possibili diminuisce in quanto AB = BA, AC=CA, …

| | | |
|---|---|---|
| AB | AC | AD |
| ~~BA~~ | BC | BD |
| ~~CA~~ | ~~CB~~ | CD |
| ~~DA~~ | ~~DB~~ | ~~DC~~ |

Rimangono 6 possibilità che chiameremo ***combinazioni senza ripetizione*** di 4 elementi presi a 2 alla volta.

# *esempio 5*$_{(3)}$

Notiamo che ciascun gruppo con elementi diversi è formato da $P_2 = 2!$ disposizioni.

Allora possiamo stabilire la seguente relazione tra disposizioni e combinazioni:

$$D_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k$$

Da cui si ricava:

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

# *coefficiente binomiale*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si chiama così perché permette di calcolare i coefficienti dello sviluppo della potenza del binomio

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{\mathrm{n}} = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

PROPRIETÁ:

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 2) $\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$

3) $\binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n$

# esempio 6

Ci chiediamo quante sono le possibili colonne del totocalcio, formate cioè da 13 elementi in cui compaiono i segni 1 X 2.

• L'ordine viene considerato in quanto se cambiamo di posto i segni otteniamo colonne diverse.

• C'è ripetizione perché sulla stessa colonna possiamo trovare più volte lo stesso segno.

• Si tratta pertanto di una ***disposizione con ripetizione*** di 3 elementi presi a 13 alla volta.

$D_{3,13}^{r} =$ disposizione con ripetizione di 3 elementi di classe 13

# *esempio 6*$_{(2)}$

Il primo segno può essere scelto in tre modi, così pure il secondo e via via fino al tredicesimo.

Pertanto il numero totale di possibili disposizioni è dato da:

$$D^{r}_{3,13} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{13}$$

In generale, dati *n* elementi, volendo fare un sottoinsieme di *k*, avremo, per ciascuno di essi, la possibilità di scelta sempre tra *n*.

$$D^{r}_{n,k} = n^{k}$$

# *esempio 7*

Consideriamo il lancio di due dadi che supponiamo di chiamare A e B. Se prendiamo il risultato del dado A, lo moltiplichiamo per 10 e lo sommiamo al risultato del dado B quanti risultati diversi possiamo ottenere? (In questo caso diverse facce dei dadi danno sempre diversi risultati nell'operazione.)

- L'ordine conta perché un dado vale 10 mentre l'altro vale 1;
- C'è ripetizione perché può uscire lo stesso numero in entrambi i dadi;
- Si tratta allora di disposizioni con ripetizione di 6 elementi di classe 2

$$D^{r}_{6,2} = 6^2 = 36$$

# *esempio 8*

Supponiamo di tirare per 4 volte una moneta; ci chiediamo quanti siano i risultati possibili se non consideriamo la sequenza di uscita.

• L'ordine non conta perché non si considera la sequenza di uscita.

• C'è ripetizione perché la moneta può presentare più volte la stessa faccia

•Si tratta di ***combinazioni con ripetizione*** di 2 elementi (T e C) presi quattro alla volta

$$C_{2,4}^{r} =$$ combinazioni con ripetizione di 2 elementi di classe 4

# *esempio 8$_{(2)}$*

In pratica i risultati che possiamo ottenere sono i seguenti

{T, T, T, T}

{T, T, T, C}

{T, T, C, C}

{T, C, C, C}

{C, C, C, C}

Il numero delle combinazioni si ottiene con il seguente calcolo

$$C^r_{2,4} = \frac{(2+4-1)!}{4!(2-1)!} = 5$$

# *esempio 9*

In una libreria ci sono 8 libri dello stesso autore. Entrano 4 clienti: in quanti modi il negoziante può aspettarsi la richiesta di acquisto delle opere di quell'autore?

• Non conta l'ordine in cui vengono chiesti i libri

• C'è ripetizione perché i clienti possono chiedere tutti la stessa opera

• Si tratta di ***combinazioni con ripetizione*** di 8 elementi presi quattro alla volta

$C^{r}_{8,4} =$ combinazioni con ripetizione di 8 elementi di classe 4

# *esempio 9$_{(2)}$*

Il numero che cerchiamo è dato da

$$C^r_{8,4} = \frac{(8+4-1)!}{4!(8-1)!} = 330$$

In generale, dati *n* elementi, il numero di insiemi con *k* elementi, alcuni dei quali possono essere ripetuti è dato da

$$C^r_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

# Approfondimento: permutazioni con ripetizione

## esempio 10

Consideriamo il nome ADA, ci chiediamo quante sono le permutazioni che possiamo ottenere.

• L'ordine conta ma ci accorgiamo che ci sono solo 3 permutazioni diverse tra loro:

ADA    DAA    AAD

e non 6 = 3! come si otterrebbe utilizzando la classica formula per le permutazioni di 3 elementi.

• Si tratta di ***permutazioni con ripetizione*** di 3 elementi di cui 2 uguali tra loro (le lettere A)

$$P_3^2 =$$ permutazione con ripetizione di 3 elementi di cui 2 uguali tra loro

# *esempio 10$_{(2)}$*

In pratica dobbiamo dividere il numero di permutazioni complessivo (3!) per il prodotto delle permutazioni ottenibili dai gruppi formati da elementi uguali

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

# *esempio 11*

Supponiamo di avere 8 bandiere, 4 delle quali sono rosse, 3 bianche ed una è azzurra. Ci chiediamo quanti segnali distinti possiamo formare allineando le 8 bandiere.

- L'ordine conta ma ci sono delle sequenze non distinguibili tra loro e di conseguenza il numero di permutazioni possibili sarà minore di *n!*

- Si tratta di ***permutazioni con ripetizione*** di 8 elementi di cui 4 uguali tra loro (le bandiere rosse), altri 3 uguali tra loro (le bandiere bianche)

$$P_8^{4,3} =$$ permutazione con ripetizione di 8 elementi di cui 4 e 3 uguali tra loro

# *esempio 11*$_{(2)}$

In pratica dobbiamo dividere il numero di permutazioni complessivo (8!) per il prodotto delle permutazioni ottenibili dai gruppi formati da elementi uguali

$$P_8^{4,3} = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = 280$$

In generale, dati $n$ elementi, di cui $n_1$ uguali tra loro, $n_2$ uguali tra loro,…, $n_k$ uguali tra loro, con $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n$ il numero di permutazioni che possiamo ottenere sarà dato da

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

# *RIASSUMENDO*

***DISPOSIZIONI***

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$D^r_{n,k} = n^k$$

***PERMUTAZIONI***

$$P_n = n!$$

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

# *RIASSUMENDO*

***COMBINAZIONI***

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C^{r}_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

# *TABELLA RIASSUNTIVA*

| | Con ripetizione | Senza ripetizione |
|---|---|---|
| Ordinati | $D^r_{n,k}$ | $D_{n,k}$ |
| Non ordinati | $C^r_{n,k}$ | $C_{n,k}$ |